数理解析研究所講究録
693巻 1989年 1-11

Quasi-Gorenstein Fano 3-folds with isolated non-rational singularities

九大理 石井志保子 (Shihoko Ishii)

Quasi-Gorenstein Fano n-fold とは n次元の normal projective variety X で anticanonical divisor $-K_X$ が ample Cartier divisor であるものを意味する。
X 上の non-rational locus Σ_X を $\Sigma_X := \{ x \in X \mid x$ は non-rational な singular point i.e. $(Rf_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$ for a resolution $f : \tilde{X} \to X \}$ と定義すると、Σ_X は X の closed subset になる。ここで quasi-Gorenstein Fano n-fold X で $\Sigma_X \neq \phi$, $\dim \Sigma_X = 0$ なるものをすべて決定するという問題を考える。例えば abelian surface 上の projective cone や normal K3-surface 上の projective cone はそのような X の例になっている。逆に quasi-Gorenstein Fano 3-fold で $\Sigma_X \neq \phi$ $\dim \Sigma_X = 0$ なるものはすべて上の例で与えられるというのがこの小稿の主張である。

定理. Xを quasi-Gorenstein Fano 3-fold with $\Sigma_X \neq \phi$ $\dim \Sigma_X = 0$ とすると. 次が成立

(i) 高々 rational singularities しかもたない normal surface S で $\mathcal{O}(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ を満たすもの が存在し. さらに. S 上の ample invertible sheaf $\mathcal{L}$ が存在して. X は S 上の projective cone w. r. to $\mathcal{L}$ になっている. (i.e. X は $\mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L})$ の negative section の contraction)

(ii) さらにこのとき.

X : Gorenstein $\Leftrightarrow$ Sは normal K3-surface.

($\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ Sはnormal surfaceで $\mathcal{O}(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, Sのminimal resolution が K3-surface)

X : non-Gorenstein $\Leftrightarrow$ S は Abelian surface.

定理は次の基本的な命題から導かれる.

命題. Xを quasi-Gorenstein Fano n-fold with $\Sigma_X \neq \phi$ $\dim \Sigma_X = 0$ とする. さらに X の a resolution $f : \hat{X} \to X$ に対し. $\bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_{\hat{X}}(mK_{\hat{X}})$ が有限生成 $\mathcal{O}_X$-algebra になると仮定すると. 高々 rational singularity しかもたない $(n-1)$-fold S で $\mathcal{O}(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ を満たすものが存在し. さらに

S 上の ample invertible sheaf $\mathcal{L}$ が存在して、
X は S 上の projective cone w.r.t. $\mathcal{L}$ になっている。

[定理の証明] 命題の条件は、minimal model conjecture が正しければ、必然的に成立する。$n=3$ の場合は、森氏、川又氏、Shokurov 氏らによって（最終的には森氏[M]によって）minimal model conjecture が肯定的に解決されたので、定理の(i)が従う。
(ii)については、$\mathcal{O}_S(K_S) \cong \mathcal{O}_S$ を満たす normal surfaces の分類が [U] でなされ、その中で高々 rational singularities を持つものは、Abelian surface か normal K3-surface であることが示されている。$g : \mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}) \to X$ として、$R^1 g_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L})}$ を考えてやると、S が Abelian の場合 $\neq 0$ となり、normal K3 の場合 $= 0$ になるのでそれぞれ、not Gorenstein 又は Gorenstein になる。

命題の証明に入る前に、証明に必要な Lemma を準備する。Lemma の証明は [M. §1] と同じなのでここでは省略する。

Lemma. Y : 高々 canonical singularities しか持たない projective n-fold $(n \geq 2)$

$R \subset \overline{NE}(Y)$ extremal ray s.t. φ_R: birational
D: φ_R の exceptional set
$\varphi_R|_D : D \to \varphi_R(D)$ の任意の fiber の次元が 1.
$D \not\subset$ (Y の non-quasi-Gorenstein locus)
の仮定のもとに次が成立する.
(i) $\varphi_R|_D$ の各 fiber は $\mathbb{P}^1$ の tree
(ii) l を general fiber の component とすると. $K_Y \cdot l \leq -1$

[命題の証明] 命題の仮定により. $Y = \mathrm{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}})$ は projective variety になり. $g: Y \to X$ を canonical morphism とすると. 次が成立する.

(1) Y は高々 canonical singularities しかもたない.
(2) $E := g^{-1}(\Sigma_X)_{red}$ とすると. E は pure codimension 1 になり. $g|_{Y-E} : Y - E \xrightarrow{\sim} X - \Sigma_X$ isom.
(3) K_Y is relatively ample with respect to g
(4) $K_Y = g^* K_X - \Delta$ とおく. $E = \sum_{i=1}^{r} E_i$ と既約分解しておく. $\Delta = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i$ $(a_i \in \mathbb{N})$ と表わされる.

さらに(3)は Δ を用いて次のように書き直される.
(3)' 任意の irreducible curve $C \subset E$ に対して $\Delta \cdot C < 0$

Claim 1 $\overline{NE}(Y)$ の中に extremal ray R で $\Delta\cdot R>0$ を満たすものが存在する。

(i) $\overline{NE}_{K_Y}(Y) := \{C\in\overline{NE}(Y) \mid K_Y\cdot C\geq 0\}$ とおくと、川又の cone theorem (cf. [K1]) により

$$\overline{NE}(Y)=\sum R_i+\overline{NE}_{K_Y}(Y)$$

と表わされる。ここで R_i は extremal ray ($\forall i$)。

Y 上の irreducible curve で E と交わり E に含まれていないもの C をとると $\Delta\cdot C>0$ を満たしている。一方 $\overline{NE}(Y)$ の中の C の class $[C]$ は $\sum l_i+a$ ($l_i\in R_i$ $a\in\overline{NE}_{K_Y}(Y)$) と表わされる。この表示を用いて、次の不等式を得る。

(5) $0<\Delta\cdot C=\sum_i(\Delta\cdot l_i)+\Delta\cdot a$.

ここで a の定義により $0\leqq K_Y\cdot a=g^*K_X\cdot a-\Delta\cdot a$ だから、$-K_X$ が nef であることを用いて $\Delta\cdot a\leqq 0$

したがって不等式(5)により、ある i が存在して $\Delta\cdot l_i>0$

この l_i の属する ray R_i を R とすれば良い。

Claim 2 R を Claim 1 の extremal ray とする。

$\varphi_R: Y\to S$ を R の contraction とすると次が成立。

(6) $\dim S=n-1$

(7) $\Delta=E=E_1$ (i.e. Δ は irreducible reduced)

で $\varphi_R|_E : E \xrightarrow{\sim} S$ isom

(8) $\Sigma_X = \{x\}$ one point set であって x を通らない $|-K_X|$ の member H が存在する.

(9) $\tilde{H} := g^*H$ とすると $\varphi_R|_{\tilde{H}} : \tilde{H} \xrightarrow{\sim} S$ isom.

(i) (6)の証明: まず $\dim S \geqq n-1$ を示そう.
E 上の任意の curve C をとると (3)′ より $\Delta \cdot C < 0$ よって $[C] \notin R$ i.e. C は φ_R によって点につぶれることはない. したがって $\varphi_R|_E : E \to \varphi_R(E)$ は finite morphism である. $\dim S \geqq \dim \varphi_R(E) = n-1$ より ok.
次に $\dim S = n$ として矛盾を出そう. この場合 φ_R は birational になるので D を exceptional set とすると $\varphi_R|_D : D \to \varphi_R(D)$ のすべての fiber は1次元になる.
事実 直前の議論より 任意の $s \in \varphi_R(D)$ に対し $\varphi_R^{-1}(s) \cap E$ は高々 finite points set になるので もし $\varphi_R^{-1}(s)$ の次元が 2 以上あれば これらの点を通らない curve $C \subset \varphi^{-1}(s)$ がとれる. この C は φ_R によって一点 s につぶれているのだから $[C] \in R$ したがって $\Delta \cdot C > 0$ でなければならない. しかし C のとり方 ($E \cap C = \phi$) により $\Delta \cdot C = 0$ となり矛盾. よって $\varphi^{-1}(s)$ の次元は 1次元である. さて Y の non-quasi-Gorenstein locus は

Eに含まれているので $D \not\subset$ (Y の non-quasi-Gorenstein locus) となる。したがってLemma により irreducible curve $l \subset \varphi^{-1}(s)$ に対して $K_Y \cdot l \geqq -1$。

一方 $l \not\subset E$ だから $-K_X$ の ampleness により $g^*K_X \cdot l < 0$。

g^*K_X は Cartier divisor であるから、上の intersection number は整数でなければならない。よって $g^*K_X \cdot l \leqq -1$。

これと $\Delta \cdot l > 0$ とあわせて $K_Y \cdot l = g^*K_X \cdot l - \Delta \cdot l$ を評価してみると $K_Y \cdot l < -1$ となり、上記に矛盾する。したがって $\dim S = n$ はおこらない。

(7)の証明：(6)により φ_R が relative dimension 1 の fiber 構造を与えることがわかった。一般に φ_R が fiber 構造を与えるとき、general fiber は weak log-terminal で $-K$ が ample であることが示されている。したがって我々の場合 general fiber l は $\mathbb{P}^1$ に同型となる。よって $-2 = K_Y \cdot l = g^*K_X \cdot l - \Delta \cdot l$.

ここで l は Δ の Cartier の部分で交わっているとしてよいので $\Delta \cdot l \geq 1$ また $g^*K_X \cdot l \leqq -1$ より上の等式は 2つの等式：

(10) $\Delta \cdot l = 1$, $g^*K_X \cdot l = -1$

を induce する。$\varphi_R : E \to S$ は finite surjection

だから、Eのすべてのcomponentとlは交わりをもつから、
$1 = \Delta \cdot l = \sum a_i E_i \cdot l \geq \sum_{i=1}^{r} a_i$ $(a_i \in \mathbb{N})$ により、
$r=1$, $a_1=1$ が出る。すなわち $\Delta = E = E_1$。

(8)の証明:
Eがirreducibleになったので、そのimage Σ_x もirreducible すなわち一点になることが示された。
$\Sigma_x = \{x\}$ と書こう。求めるHが存在するためには、
$\Gamma(X, m_x \mathcal{O}(-K_X)) \subset \Gamma(X, \mathcal{O}(-K_X))$ が一致しないことを示せば十分。ここでm_xは点xの定義ideal sheafである。$K_Y = g^*K_X - E_1$ を移項してsheafをとれば $\mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}(-g^*K_X) = \mathcal{O}(-E_1)$ が得られる。右辺はreduced idealであるので $m_x \mathcal{O}_Y$ を含むことに注意しておく。gによるdirect imageをとれば

$$g_*\mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}(-K_X) = g_*\mathcal{O}(-E_1) = m_x$$

を得る。したがって $m_x \mathcal{O}(-K_X) = g_*\mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}_X(-2K_X)$。
ここでLeray spectral sequence:

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q g_* \mathcal{O}(K_Y - 2g^*K_X)) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \mathcal{O}(K_Y - 2g^*K_X))$$

を考えると、trivial edge sequenceにより injection

$$H^1(X, g_*\mathcal{O}(K_Y) \otimes \mathcal{O}(-2K_X)) \hookrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}(K_Y - 2g^*K_X))$$

を得る。$-2g^*K_X$ はnefでbigだから川又-Viehweg vanishing theoremにより、右側が消え、したがって左のcohomologyも消える

したがって、次のexact sequenceで：

$$0\to\Gamma(X, m_x\mathcal{O}(-K_X))\xrightarrow{\alpha}\Gamma(X,\mathcal{O}(-K_X))\xrightarrow{\beta}\underset{\substack{\| \\ \mathbb{C}}}{\mathcal{O}(-K_X)/m_x\mathcal{O}(-K_X)}\to \underset{\substack{\| \\ H^1(X, g_*\mathcal{O}(K_Y)\otimes\mathcal{O}(-2K_X))}}{H^1(X, m_x\mathcal{O}(-K_X))}$$

右端$=0$ となる．よって β が surjective になるので α は同型にならないことが示された．

(9)の証明：$H\in|-K_X|$ $x\notin H$ $\widehat{H}=g^*H$ とすると φ_R の general fiber l に対して $\widehat{H}\cdot l=-g^*K_X\cdot l=1$ (by (10)) したがって $\varphi|_{\widehat{H}}:\widehat{H}\to S$ は birational である．今，irreducible curve $C\subset\widehat{H}$ を $\varphi_R(C)=$ one point なるものとすると $[C]\in R$ より $\Delta\cdot C>0$ でなければならない．しかし $\widehat{H}\cap E=\phi$ であったので $\widehat{H}$ 上の curve C も $C\cap E=\phi$ よって $\Delta\cdot C=0$ (矛盾) したがって $\widehat{H}$ の中で点につぶれているような curve は存在しない．すなわち $\varphi|_{\widehat{H}}$ は finite morphism である．S は normal なので Z.M.T より finite な birational morphism $\varphi_R|_{\widehat{H}}$ は isomorphism になる．これで claim 2 は証明しおわった．

さて次に $\varphi_R: Y\to S$ が実は S 上の $\mathbb{P}^1$-bundle になることを示そう．以後簡単のために φ_R を単に φ と書くことにする．$\mathcal{L}:=\mathcal{O}_Y(\widehat{H})$ とすると，これは relatively ample w.r.to φ になる. 実際 C を φ による fiber の irreducible comp. とすると. $[C]\in R$ だから. $\Delta\cdot C>0$ よって $C\not\subset E$. したがって $\tilde{H}\cdot C=-g^*K_X\cdot C>0$ これより $\mathcal{L}$ は. φ の各 fiber で ample であることがわかるので relatively ample w.r.to φ である. Y の上の exact sequence : $0\to\mathcal{O}_Y\to\mathcal{L}\to\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{H}}\to 0$ の φ による direct images をとって.

$$(11)\qquad 0\to\underset{\mathcal{O}_S}{\underset{\parallel}{\varphi_*\mathcal{O}_Y}}\to\varphi_*\mathcal{L}\to\varphi_*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{H}})\to\underset{0}{\underset{\parallel}{R^1\varphi_*\mathcal{O}_Y}}$$

を得る ここで 右端が消えるのは. φ が extremal ray の contraction だからである. ([K2] Th 1.2).

$\tilde{H}$ に制限すると. φ は同型であるから. $\varphi_*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{H}})$ は S 上の invertible sheaf になる. よって $\varphi_*\mathcal{L}$ は rank 2 の locally free sheaf になる.

可換図式 :

$$\begin{array}{ccccccc}0\to&\mathcal{O}_Y&\to&\mathcal{L}&\to&\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{H}}&\to 0\\ &\parallel&\circlearrowright&\uparrow\nu&\circlearrowright&\uparrow&\\ &\varphi^*\varphi_*\mathcal{O}_Y&\to&\varphi^*\varphi_*\mathcal{L}&\to&\varphi^*\varphi_*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{H}})&\to 0\end{array}$$

により. $\nu:\varphi^*\varphi_*\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ は surjective になる. すなわち. $\mathcal{L}$ によって. S 上の morphism $\Phi_{|\mathcal{L}|}:Y\to\mathbb{P}(\varphi_*\mathcal{L})$ が定義できる. $\mathcal{L}$ は relatively ample だったので $\Phi_{|\mathcal{L}|}$ は finite morphism である. また. general fiber $l=\varphi^{-1}(s)$ に対して. $\deg\mathcal{L}|_l=\tilde{H}\cdot l=1$ だから $\Phi_{|\mathcal{L}|}$ は birational

一方$\mathbb{P}(\varphi_*\mathcal{L})$は normal $(n-1)$-fold S 上の locally trivial $\mathbb{P}^1$-bundle だから normal である。したがってZ.M.Tを使えば $\Phi|_{\hat{X}}$ は isomorphism になる。ここで $Y\cong\mathbb{P}(\varphi_*\mathcal{L})$ に $\hat{H}$ と disjoint な section E が存在する (by (7).(8)) ので exact sequence (11) は split する。よって $Y=\mathbb{P}(\mathcal{O}_S\oplus\mathcal{L}_S)$ ただし $\mathcal{L}_S=\varphi_*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{\hat{H}})$. X は Y の negative section E をつぶして得られたものである。また S の singularity に non-rational なものがあると Σ_X の次元が1以上になってしまうので矛盾。これにより命題の証明が完了したことになる。

References.

[K1] Kawamata, Y.: The cone of curves of algebraic varieties, Ann. of Math. 119 (1984) 603–633.

[K2] ——: Crepant blowing-ups of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces.

[M] Mori, S.: Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. J of AMS, 1 (1988) 117–253.

[U] Umezu, Y.: On normal projective surface with trivial dualizing sheaf. Tokyo J. of Math. 4 (1981) 343–354